Algèbre de Boole et fonctions logiques

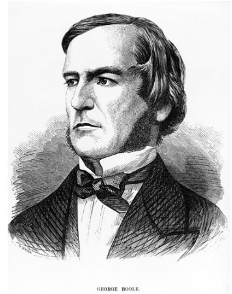
M1103 - Architecture des équipements informatiques

`Sebastien.Kramm@univ-rouen.fr`

IUT R&T Rouen, site d'Elbeuf

2018-2019

Algebre de Boole



- Formalisé en 1847 par Georges Boole (1815-1864), physicien anglais.
- Algèbre applicable au raisonnement logique qui traite des fonctions à variables binaires.
  - Variable booléenne : ne peut avoir que deux états possibles, notés 0 et 1, et correspondant aux états "vrai" (1) et "faux" (0).
  - Permet d'étudier les **fonctions** & **circuits** logiques.
    - Fonctions logiques : application qui associe une valeur de sortie en fonction de l'état de variables d'entrées.
    - Circuits logiques : implémentation dans une technologie donnée d'une fonction logique.

Opérateurs

- Opérateur NON, noté par une barre au dessus de la variable : $a = \bar{b}$ (s'applique sur une seule variable ou expression)
  On parle aussi d'opérateur "complément" ou "complément à 1"
- Opérateurs réalisant une opération entre plusieurs variables :
  - Opérateur ET (*AND*), noté '$\cdot$'

$$S = a \cdot b \qquad \text{ou aussi} \qquad S = a\,b$$

  - Opérateur OU (*OR*), noté '+'

$$S = a + b \qquad \text{ou} \qquad S = a + b + c$$

- Comme en algèbre classique, ces opérations peuvent se combiner :

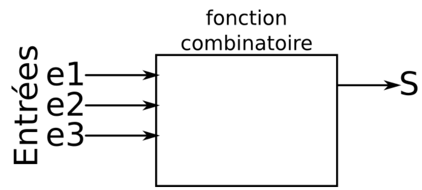
$$S = a + b\,(c + a\,\bar{d})(\bar{b} + \overline{(z + \bar{a}\,b)})$$

Classification des fonctions logiques

Logique combinatoire

- Les sorties sont une fonction combinatoire des entrées : $S = f(E)$
- A **une** configuration des entrées correspond **une** configuration unique des sorties.

$\Rightarrow S = f(e_1, e_2, e_3)$



Logique séquentielle

- Les sorties sont fonctions des entrées **et** de l'état interne du système.
- A **une** configuration des entrées peut correspondre **plusieurs** configurations des sorties.

$\Rightarrow S = f(e_1, e_2, e_3, S)$

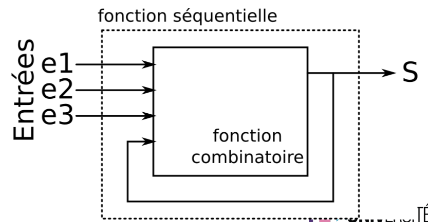


Table de vérité

- Une fonction logique (même composée d'un seul opérateur) peut être caractérisée par une **table de vérité**.
- Donne la liste des tous les états possible pour les entrées et la valeur de la variable de sortie.

Fonction : $S = a + b$
(opérateur OU)

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fonction : $S = a \cdot b$
(opérateur ET)

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Propriétés de l'algèbre de Boole

- De nombreuses propriétés sont similaires à l'algèbre classique :
  - Commutativité : $a + b = b + a$
  - Associativité :
    $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
    $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
  - Distributivité : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- D'autres sont spécifiques :
  - Idempotence :
  - Double complémentation :
  - Complémentarité :
  - Elément neutre :
  - Elément absorbant :

Autres propriétés

- Absorption (découle des propriétés précédentes)

$$a + a \cdot b =$$

- Optimisation :
  $a + \bar{a}b =$
  $a + \bar{a}b = a + ab + \bar{a}b = a + b(a + \bar{a})$

Simplification algébrique

Théorème de De Morgan

$$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \qquad \overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

- Applicable avec plus de deux opérateurs, **si identiques** :

$$\overline{X + Y + Z} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \qquad \overline{X \cdot Y \cdot Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

Attention aux priorités !

$$\overline{a + b \cdot c} = \overline{a + (b \cdot c)} = \bar{a} \cdot \overline{b \cdot c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c})$$

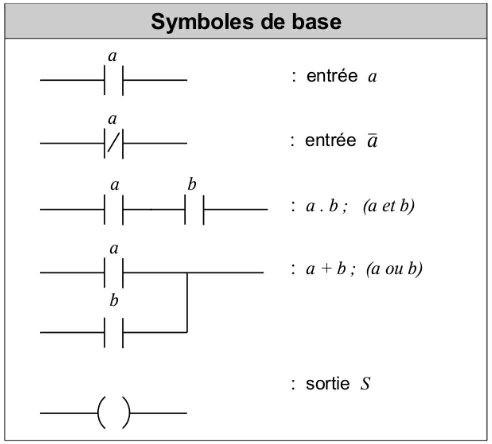
$$\overline{a \cdot (b + c)} = \bar{a} + \overline{b + c} = \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{c}$$

Simplification d'expression

- Simplifier les expressions suivantes :
- $S1 = (a + b) \cdot (b + c)$
- $S2 = (b + c) \cdot (b + \bar{c})$
- $S3 = (e + \bar{f})\,(e + g) + g\,(\bar{e} + f)$

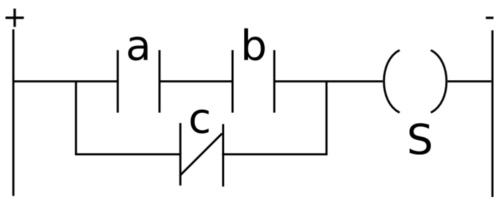
Schémas à contacts

- Historiquement, les fonctions logiques ont été d'abord implémentées sous formes de **contacts électriques** (ouvert : 0, fermé : 1) associés à des récepteurs (en general des bobines de relais).
- Le schéma électrique correspondant est une représentation de la fonction logique.



Schémas à contacts (langage "**ladder**")

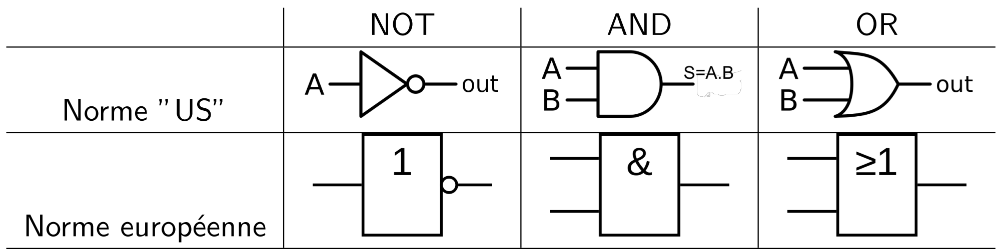
- On obtient les fonctions logiques par association de contacts



- Donner l'expression de S :

Logigramme

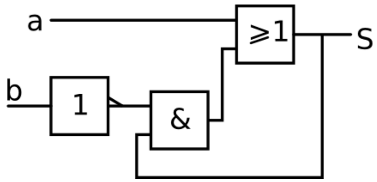
- On peut aussi représenter une expression sous forme graphique via des symboles représentant les **opérateurs** logiques élementaires.
- Différentes normes existent :
  (⚠ : ne pas mélanger les deux sur un schéma !)

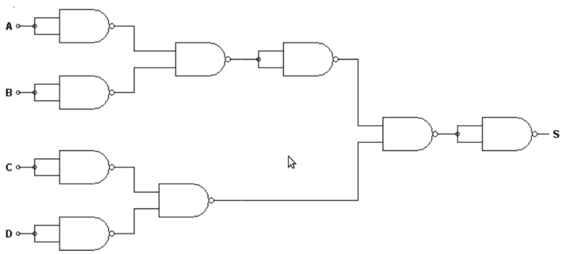


Note : on symbolise l'inversion par un rond ou un triangle sur la sortie
ET et OU : On peut avoir des opérateurs à 2, 3, 4,... entrées

Logigramme

On peut ainsi représenter les expressions en connectant les symboles des opérateurs :





Règle absolue :

Entrées à **gauche**, sorties à **droite** !

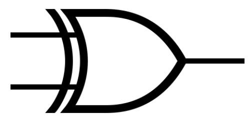
Opérateur Ou-Exclusif (EXOR)

- Table de vérité

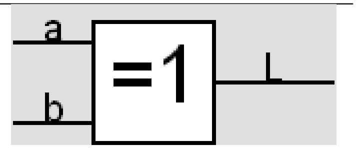
a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Symbole algébrique :
  $S = a \oplus b$
- Equation :
  $S =$
- Algèbre : commutatif, mais **pas distributif** :
  $(a \oplus b) \cdot c \neq a\, c \oplus b\, c$
- Symbole :

Norme "US" (ANSI)



Norme européenne

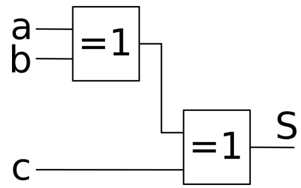


Opérateur Ou-Exclusif : propriétés

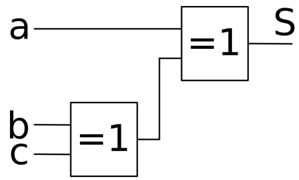
- Cet opérateur ne peut pas être simplifié, il faut passer par la forme développée :
  $(a \oplus b) \cdot c = (\bar{a}b + a\bar{b}) \cdot c$
  $(a \oplus b) + c = \bar{a}b + a\bar{b} + c$
- Inversion d'une des variables :
  si on a $S = ab + \bar{a}\bar{b}$, alors en faisant un changement de variable $c = \bar{b}$, on peut retrouver la forme canonique :
  $S = a\bar{c} + \bar{a}c = a \oplus c = a \oplus \bar{b}$
- Inversion :
  $\overline{S} = \overline{a \oplus b} =$

Opérateur Ou-Exclusif : propriétés

- Ne peut avoir que **deux** opérandes
  → logigramme : l'opérateur n'existe que avec deux entrées
- Une expression comme $S = a \oplus b \oplus c$ devra s'effectuer en deux temps :



ou



- La forme développée s'écrira :

$$S = a \oplus b \oplus c = \left(a\bar{b} + \bar{a}b\right) \oplus c = \left(a\bar{b} + \bar{a}b\right) \cdot \bar{c} + \left(\overline{a\bar{b} + \bar{a}b}\right) \cdot c$$

$$=$$